Matrikelnr. 702378

Mitschrift vom 9.06.2000 Theoretische Informatik

Ergänzung zur letzten Vorlesung: $W_{ij}^{\ n}$

Bemerkung: Offenbar muß gelten für jedes $i \in S$: $\mathbf{X^* = \bigcup_{j \in S} W_{ij}^{\ n}}$

[Starte in i und lande für beliebig $w \in X^*$ in irgendeinem $j \in S$]

Obiges Beispiel: $W_{11}^{\ 2} \cup W_{12}^{\ 2} = \{a,b\}^* = \underbrace{\{\varepsilon\} \cup \{a,b\}}_{W_{11}^{\ 2}} \cdot \underbrace{\{b,aa,ab\}^* \cdot \{a\} \cup \{a,b\} \cdot \{b,aa,ab\}^*}_{W_{12}^{\ 2}}$

Fragestellung: Kann man maschinell entscheiden, ob $W_{12}^{\ 2}$ für einen regulären Ausdruck R gilt:
$\sigma(R) = X^*$ (*Maximalitätsproblem*) [$\rightarrow$Leerheitsproblem]
Das Problem ist algorithmisch lösbar ($\rightarrow$ Übung).

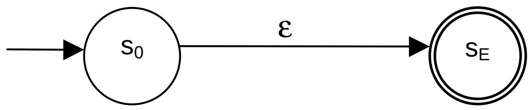
Systematische Konstruktion von Akzeptoren

1. Induktive Vorgehensweise:

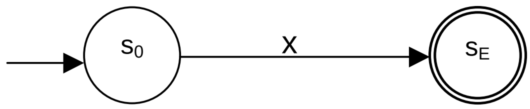
Regulärer Ausdruck — Automat

$\emptyset$

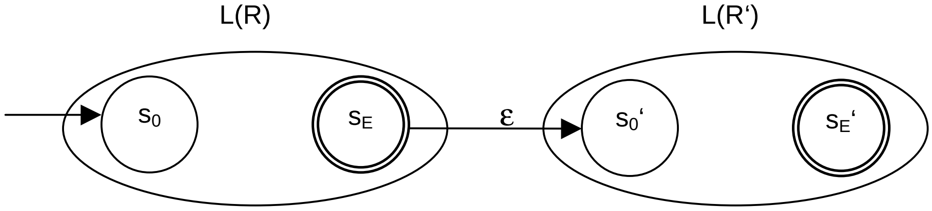
ε



$\mathbf{x \in X}$



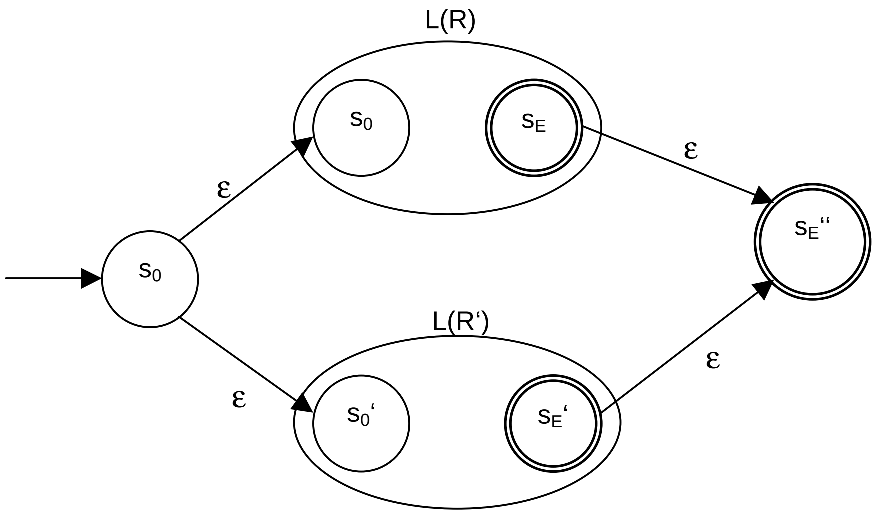
$\mathbf{R \cdot R'}$



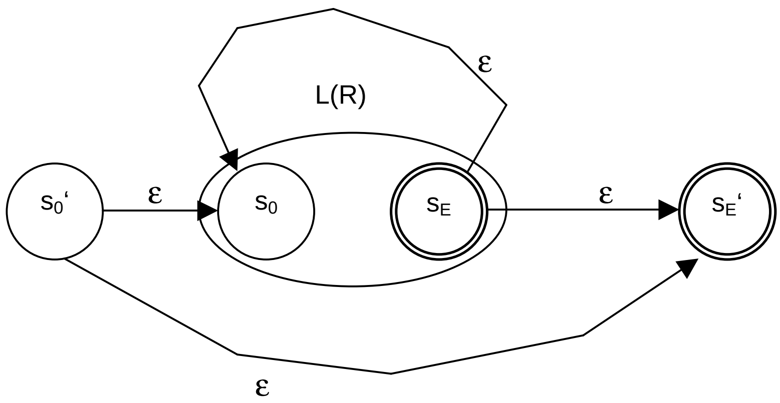
Matrikelnr. 702378

Regulärer Ausdruck Automat

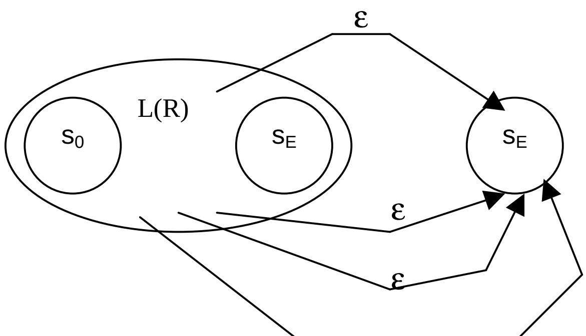
$R \cup R'$



R*



X* / R

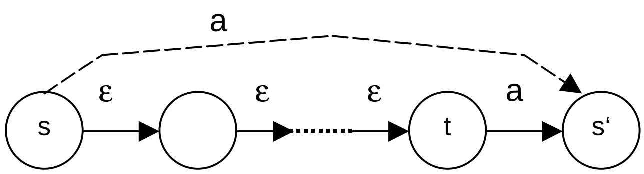


Matrikelnr. 702378

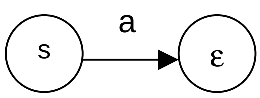
→ ε - Übergänge entfernen

2. → Lösche ε - Übergänge

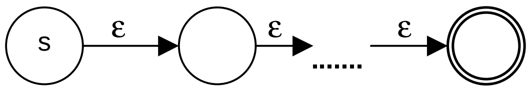
   a) Falls es den Übergang



gibt, dann ergänze



   b) Falls es den Übergang



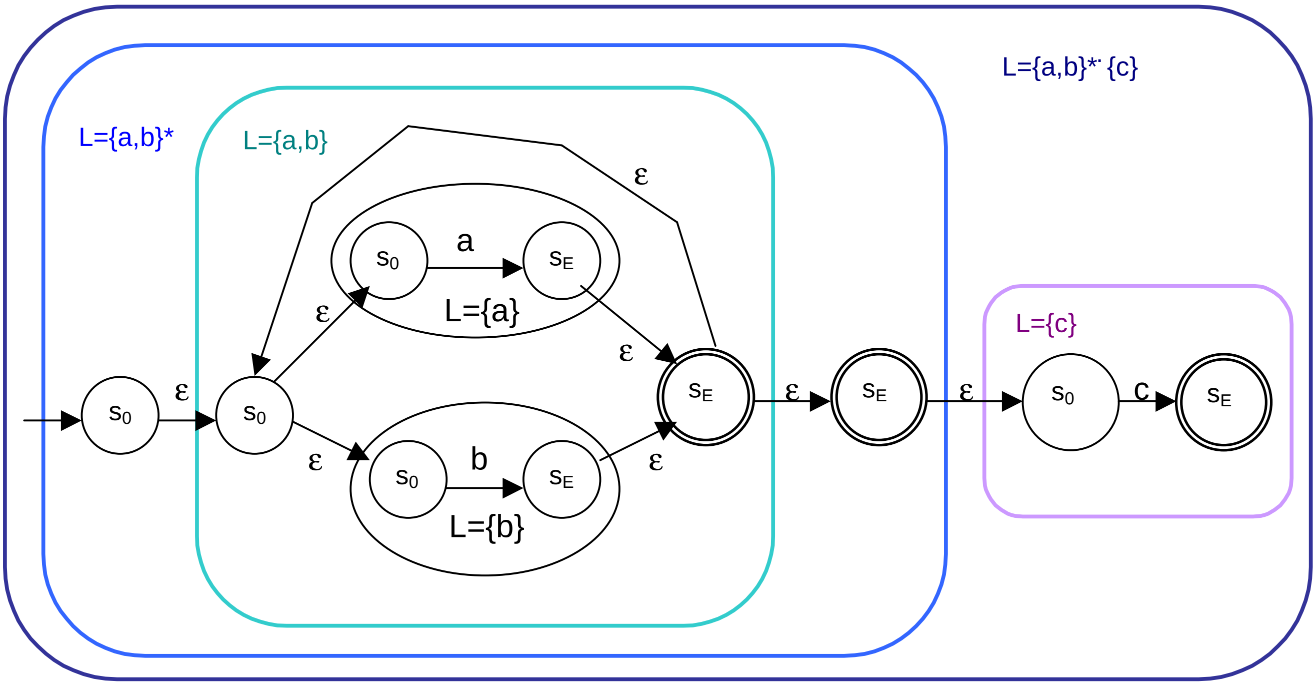
gibt, dann mache s zum Endzustand.

   c) Lösche alle ε - Übergänge

3. Deterministisch machen (s.o.) [wurde ausgiebig behandelt]

4. Reduziere den Akzeptor
   [→ den eindeutigen (bis auf Isomorphie) zustandsminimalen Akzeptor]
   Beispiel: (lex,jacc)

<u>Bsp.:</u> (a∪b)*·c



Matrikelnr. 702378

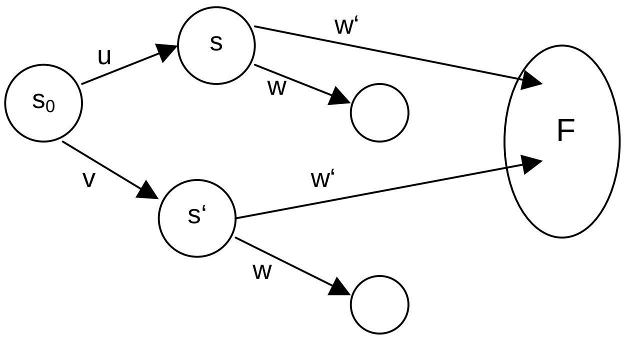
4.4. Algebraische Charakterisierung regulärer Sprachen

Wir kennen folgende Charakterisierungen:

- endl. det. Akzeptoren - endl. nichtdet. Akzeptoren	Automatenbezogen	„Erkennen“	von Sprachen
- reguläre Ausdrücke	Sprachbezogen	„Erzeugen“	
- algebraische Charakterisierung (später:- Grammatikalische Charakterisierung)		„Erzeugen“	

Definition R: Sei $L \subseteq X^*$ eine Sprache.
Die Relation $\equiv_L$ definiert durch $u \equiv_L v \Leftrightarrow \forall\, w \in X^*: (uw \in L \Leftrightarrow vw \in L)$ für alle $u,v \in X^*$
(Nerode - Äquivalenz zur Sprache L)

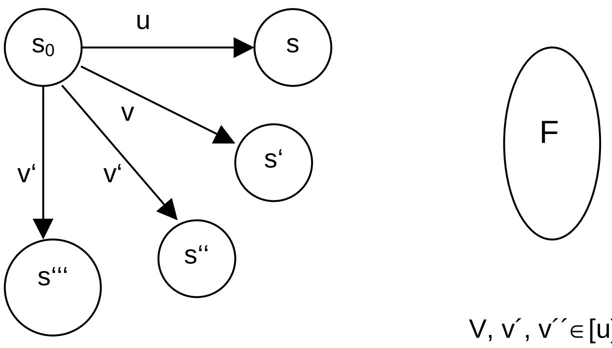
[u und v können bei beliebiger Konkatenation mit $w \in X^*$ zugleich zu Worten aus $\in L$ bzw. $\notin L$ fortgesetzt werden]



Bemerkung 1: $\equiv_L$ ist eine Äquivalenzrelation, denn
$\equiv_L$ ist reflexiv ($\forall\, u \in X^* : u \equiv_L u$)
$\equiv_L$ ist symmetrisch ($\forall\, u \in X^* : u \equiv_L v \Leftrightarrow v \equiv_L u$)
$\equiv_L$ ist transitiv ($\forall\, u,v,w \in X^* : u \equiv_L v$ und $v \equiv_L w \Rightarrow u \equiv_L w$)

Bemerkung 2: $\equiv_L$ ist verträglich mit Rechtskonkatenation:
$\forall\, u,v,w \in X^* : u \equiv_L v \Rightarrow uw \equiv_L vw$.

Definition S: Sei für jedes $u \in X^*$: $[u] := \{v \in X^* \mid u \equiv_L v\}$ die Äquivalenzklasse von v bezüglich $\equiv_L$
$K_L := \{ [u] \mid u \in X^* \}$ ist definiert als die Menge der Äquivalenzklassen.
$|K_L|$ ist der <u>Index</u> von $\equiv_L$.



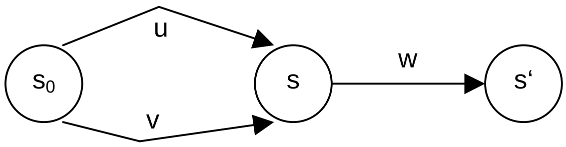
V, v´, v´´ ∈ [u]: Das funktionale Verhalten von s, s´, s´´, s´´´ ist gleich.

Matrikelnr. 702378

<u>Satz T</u>: L ist genau dann regulär, wenn der Index von $\equiv_L$ endlich ist. (Satz von Myhill / Nerode)

<u>Beweis</u>: „$\Rightarrow$": Sei L regulär, dann zeige das $|K_L|$ endlich ist.
$L \subseteq X^*$. Sei $A = (X,S,\delta,s_0,F)$ ein deterministischer endlicher Akzetor mit $L=L(A)$.
Betrachte zwei Wörter $u,v \in X^*$ mit $\delta(s_0,u) = s = \delta(s_0,v)$.
Für alle $w \in X^*$ gilt jetzt:

$$\delta(s,w) = \delta(s_0,uw) = \delta(s_0,vw)$$



d.h. $uw \in L \Leftrightarrow vw \in L$. Wenn also $\delta(s_0,u) = \delta(s_0,v)$, dann folgt $u \equiv_L v$ und $[u] = [v]$.
Folglich ist die Zahl der Äquivalenzklassen höchstens so groß wie die Zahl der Zustände $|s|$, also ist der Index von $\equiv_L \leq |s|$, also endlich.

„$\Leftarrow$": Sei $L \subseteq X^*$ eine Sprache mit endlichem Index, dann ist nach Definition S
$K_L = \{[u_1],...,[u_k]\}$ für geeignete Wörter $u_1,...,u_k \in X^*$.

Definiere nun einen endlichen deterministischen Akzeptor, der L akzeptiert.

<u>Idee</u>: Verwende Äquivalenzklassen als Zustände.
Sei also $A = (X,S,\delta,s_0,F)$ mit $s = K_L$, $s_0 = [\varepsilon]$, $F = \{[w] \mid w \in L\}$
$\delta : s \times X \rightarrow s$ mit $\delta([w],x) = [wx], \forall\, x \in X$.

<u>Ist die Definition sinnvoll?</u> *(Wohldefiniertheit)*
Nachprüfen, daß A bzw. δ wohldefiniert sind.

<u>Heißt hier:</u> Egal welchen Vertreter der Äquivalenzklasse man verwendet, das Ergebnis von δ muß eindeutig bestimmt sein.
<u>Zeige also:</u> $[v] = [u] \Rightarrow \delta([v],x) = \delta([u],x), \forall\, x \in X$.

<u>Bewies:</u> *$[v] = [u] \Rightarrow v \equiv_L u \Rightarrow \forall\, x \in X : vx \equiv_L ux \Rightarrow [vx] = [ux]$.*
<u>Das heißt also:</u> $\delta([v],x) = [vx] = [ux] = \delta([u],x)$.
Also ist δ wohldefiniert.

<u>Zeige noch:</u> $L(A) = L$.
Sei $w \in L(A) \Rightarrow \delta(s_0,w) \in F \Rightarrow \underbrace{\delta([\varepsilon],w)}_{[\varepsilon w] = [w]} \in F \Leftrightarrow [w] \in F \Leftrightarrow w \in L$.