6. Suchen

Suchen = Tätigkeit, in einem vorgegebenen Datenbestand alle Objekte zu ermitteln, die eine best. Bedingung, das **Suchkriterium**, erfüllen und ggf. einen Verweis auf diese Objekte abzuliefern.

Suche **erfolglos** ==> meist neues Objekt in den Datenbestand einfügen.

Bekannt:
- sequentielles Suchen auf allgemeinen Datenbeständen
- binäres Suchen auf sortierten Datenbeständen.

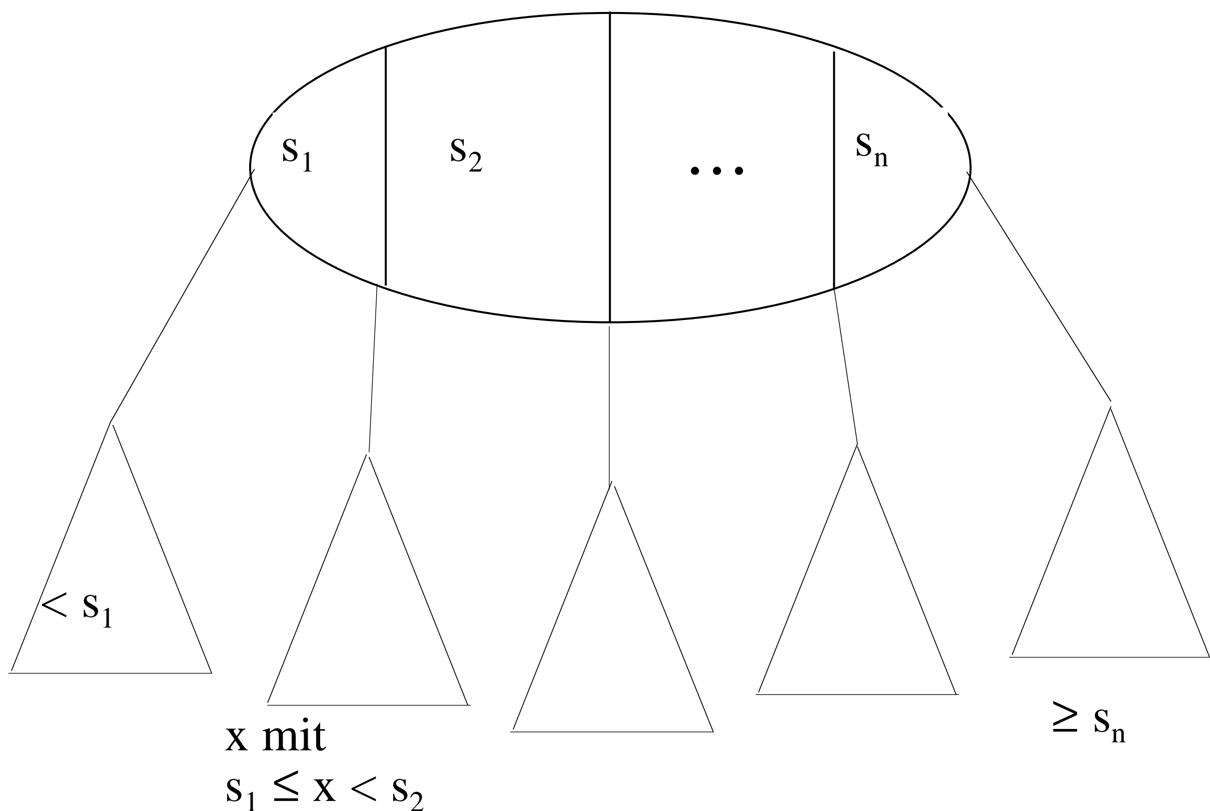
Sequentielle Datentypen eignen sich nur, wenn die Daten über einen längeren Zeitraum unverändert bleiben und Einfüge- oder Ausfügeoperationen kaum vorkommen.
In praktischen Anwendungsfällen: meist verkettete Speicherverfahren, bei denen Einfügeoperationen effizient möglich sind.

6.1 Suchbäume

Datenstruktur, in der man Objekte effizient finden, einfügen und löschen kann.

Voraussetzung: linear geordnete Menge M von **Schlüsseln** (=Merkmale, die Objekte eindeutig identifizieren).

Rekursiv Definition anschaulich:



Für Internspeicher:

- oft binäre Suchbäume
- jeder Knoten ein Schlüssel s
- Knoten im linken Teilbaum mit Schlüsseln < s
- Knoten im rechten Teilbaum mit Schlüsseln ≥s

Für Externspeicher

Suchbäume mit n = 128, 256 oder mehr Schlüsseln, sog. **B-Bäume**.

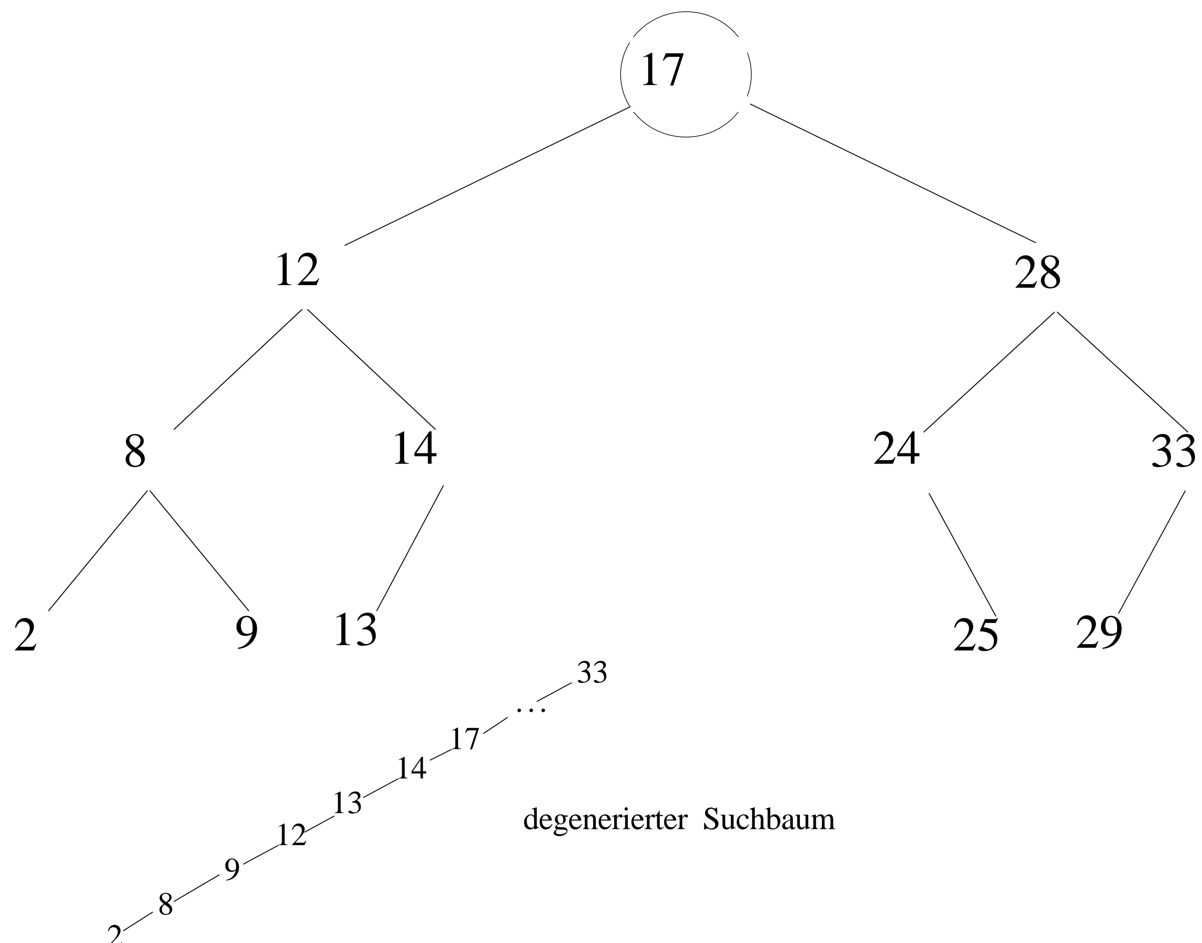
Definition

Sei M eine linear geordnete Menge. Ein binärer Suchbaum B = (K,A,S) für M ist ein geordneter, binärer Baum B=(K,A) mit einer Abb. S: K→M, so daß für jeden Knoten k∈K gilt:

(1) S(k)>S(u) für alle Knoten u im rechten Teilbaum von k

(2) S(k)≤S(u) für alle Knoten u im linken Teilbaum von k.

Beispiel:



Operationen:

- Suchen nach Schlüssel s
    - Beginn an der Wurzel s_0
    - Vergleich mit der Wurzel
    - Suche im linken oder rechten Teilbaum, falls $s < s_0$ bzw. $s \geq s_0$ und rekursiv weitermachen.
    - Suche erfolglos, falls der entsprechende Sohn, zu dem man verzweigen soll, nicht existiert.

- **Einfügen**
    - Neue Knoten s werden grundsätzlich als Blatt eingefügt.
    - Vorgehensweise: Suche zunächst s; dabei gelangt man an ein Blatt, zu dem der Nachfolger nicht existiert; füge s als diesen Nachfolger ein.

Beispiel: 22

- **Löschen**: Bis auf Sonderfälle aufwendiger: k sei zu löschender Knoten
- Sonderfälle:

  1) k ist Blatt. Lösche k

  2) k hat keinen rechten Sohn. Lösche k

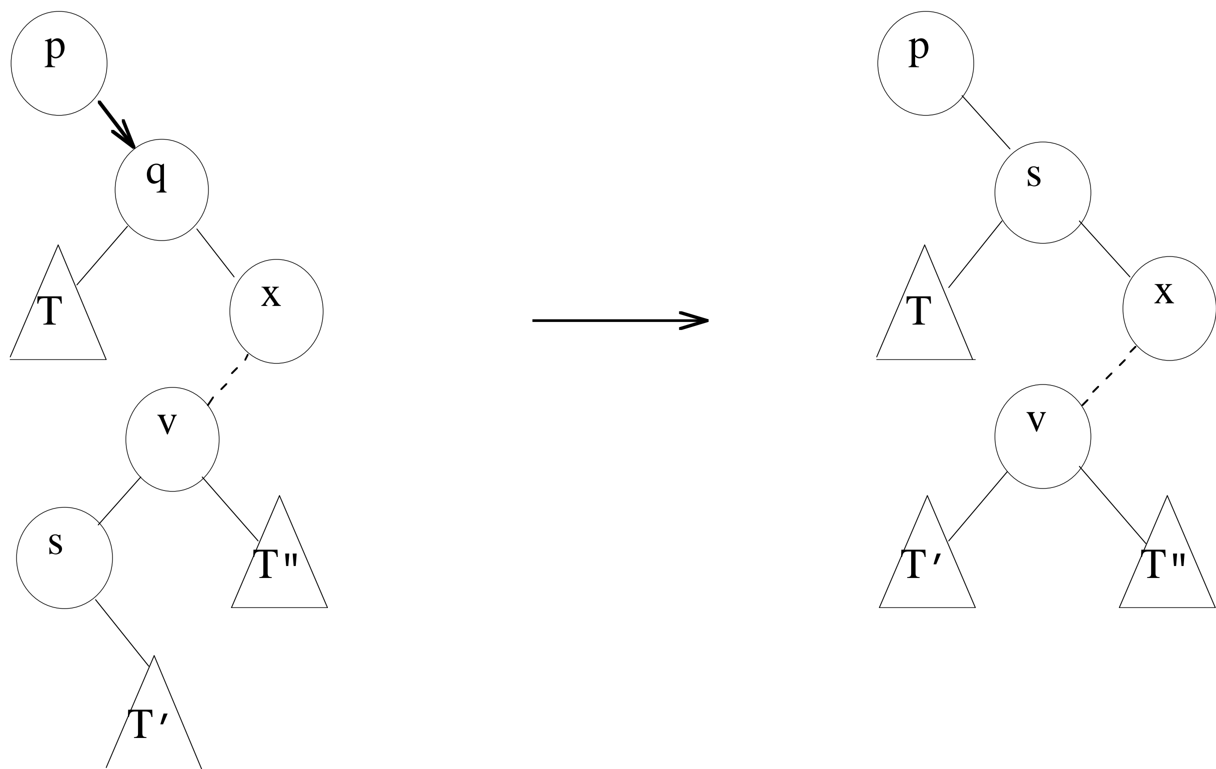
  Neuer Sohn des Vaters von k wird der linke Sohn von k

  3. dto., falls k keinen linken Sohn hat.

Allgemein: Suche in der inorder-Reihenfolge im rechten Teilbaum von k den ersten Knoten, der keinen linken Sohn besitzt, und füge ihn an die Stelle des zu entfernenden Kotens ein.

Beispiel: Lösche 28

Allgemein: Lösche q



s ist hier der inorder-Nachfolger von q

Laufzeit: Suchen + Einfügen + Löschen:

gut ausgeglichener Baum:	O ($\log_2$ n)
degenerierter Baum:	O (n)

Bem.: degenerierte Bäume sind sehr selten. Werden Schlüssel zufällig eingegeben, sind im Mittel 2 ln n Vergleiche nötig

Speicherbedarf: O(1) bei nicht-rekursiver Implementierung.

Problem: Wie verhindert man degenerierte Bäume?
Lösung: AVL-Bäume, siehe unten.

Algorithmus: Suche mit Argument K + Einfügen, falls nötig

```
Baum =
   record
        key: ...
        lt, rt: ↑ Baum
   end
w: Wurzel des Suchbaums
p: =w; q: =nil; B: =false;
while not B do
begin
   if p = nil then B: = true else
      begin
         if K = p↑. key the B: = true else
            begin
               q: =p;
               if K< p↑. key then p: = p↑. lt else p: = p↑. rt
            end
      end
end;
if p≠ nil then „p↑  ist der gesuchte Knoten“
else
   begin
      new ( r )
      r↑. key: = K;
      r↑. lt: = nil; r↑. rt: = nil;
      if K < q↑. key then q↑ = lt:= r else q↑. rt: = r
   end
```

Algorithmus: Entfernen des Knotens q↑

```
t: = q;
if t↑.rt = nil then q↑: = t↑. lt↑ else
   begin
      if t↑.lt = nil then q↑: = t↑.rt↑ else
      begin
         r: = t↑.rt;
         if r ↑.lt = nil then
         begin
            r↑.lt: = t↑.lt; q: = r
         end else
         begin
            s: = r↑. lt;
            while s↑. lt ≠ nil do
            begin
               r : = s; s : = r↑.lt
            end;
            s↑. lt: = t↑. lt; r↑.lt: = s↑. rt;
            s↑. rt: = t↑. rt; q↑: = s↑
         end
      end
   end;
dispose(t)
```

6.2 Ausgeglichene Bäume

Laufzeit bei Suchbäumen <--> Länge des längsten Weges von der Wurzel zu einem Blatt

Regel: ordne alle Knoten möglichst nah an der Wurzel an.

Offenbar: Baum mit n Knoten --> Länge des längsten Weges im günstigsten Fall $[\log_2 (n+1)]$ (obere Schranke für die Suchzeit).

Bei dynamischer Änderung des Baumes kann die Optimalitätseigenschaft verloren gehen, der Baum mehr und mehr degenerieren.

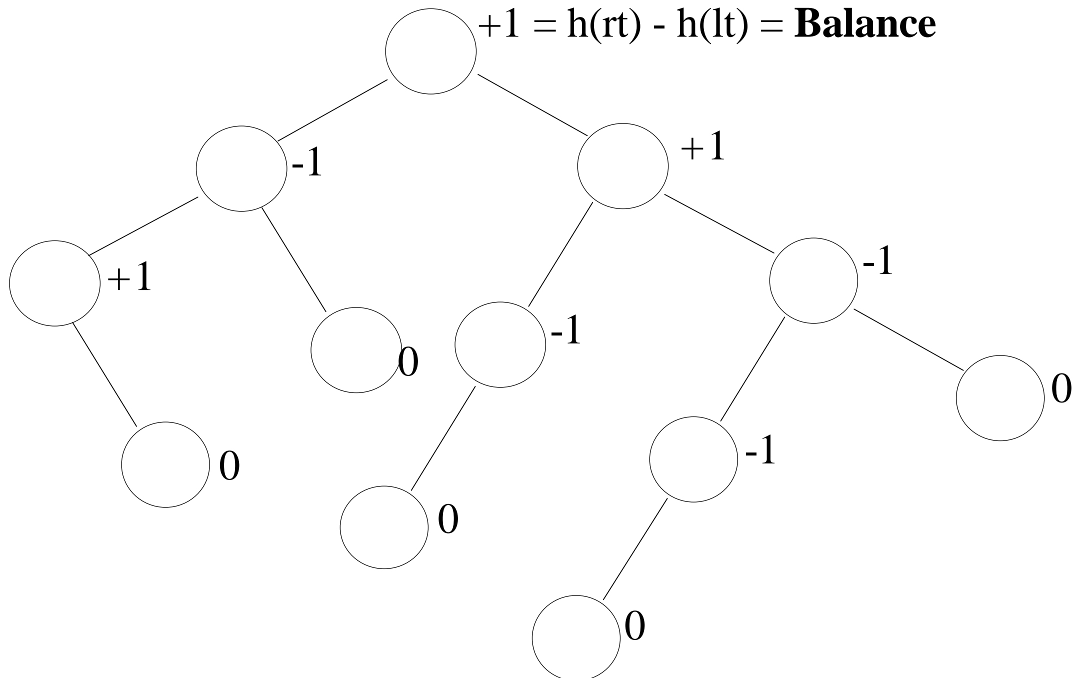
Naiver Zugang:
Man gleicht den Suchbaum nach jeder Veränderung vollständig aus.
Konsequenz: erheblicher Effizienzverlust.

Verbesserung:
Offenbar kommt es nicht so sehr auf die vollständige, sondern auf eine „gewisse“ Ausgeglichenheit an.
Übergang zu „fast“ ausgeglichenen Bäumen.

Definition

Ein binärer Baum heißt **ausgeglichener Baum** oder **AVL-Baum** (Adelson-Velskij und Landis), falls sich für jeden Knoten s die Höhen der beiden Teilbäume um höchstens 1 unterscheiden.

Beispiel:



Operationen:

Suchen: wie bisher

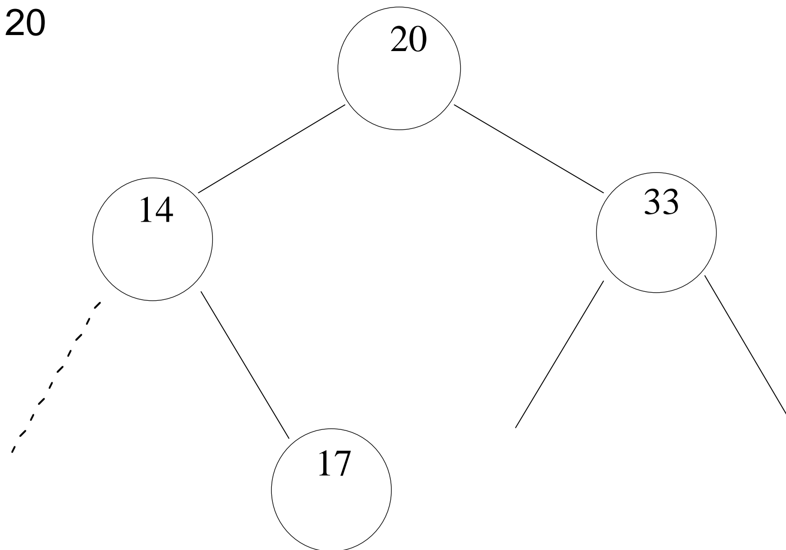
Einfügen: wie bisher, anschließend ausgleichen

Beispiel:

Einfüge 30

14 +1
8 0
20 +1 (+**2**)*
3 0
11 0
17 0
33 0 (**-1**)*
26 0 (+**1**)*
39 0
*
30 **0**

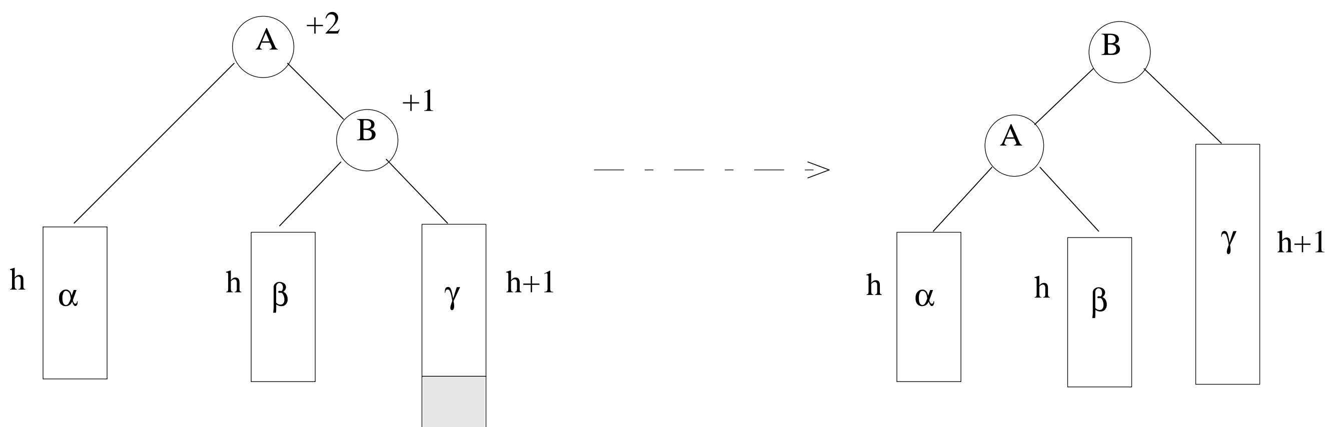
Rotation an Knoten 20



Systematisch:

2 Fälle (bis auf Symmetrie):

1)

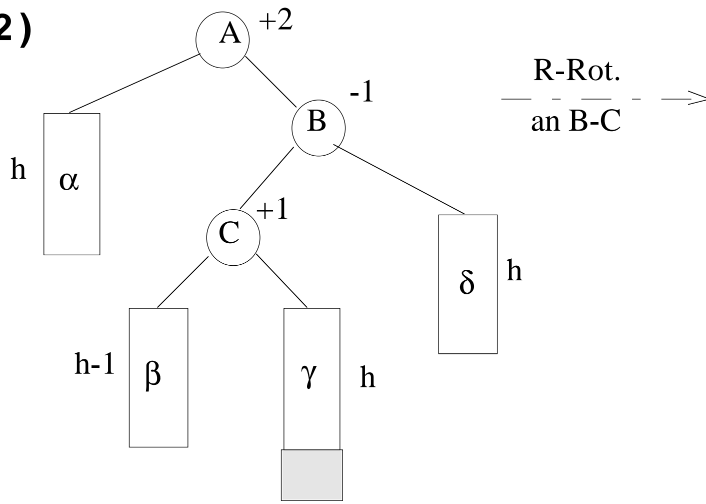


L - Rotation an Kante A-B

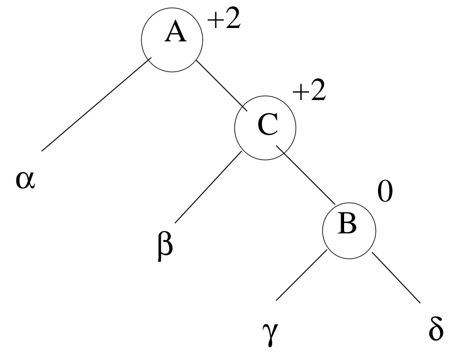
dgl. R - Rotation

Schreibweise: $\alpha\ (\beta\ \gamma) \rightarrow (\alpha\ \beta)\ \gamma$

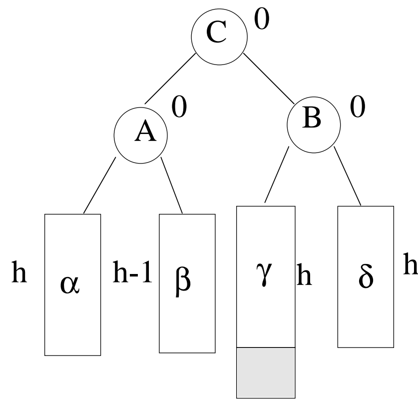
2)



R-Rot.
an B-C



L-Rot.
an A-C



$\alpha\ ((\beta\ \gamma)\ \delta) \rightarrow$

$\alpha\ (\beta\ (\gamma\ \delta))^{R} \rightarrow$

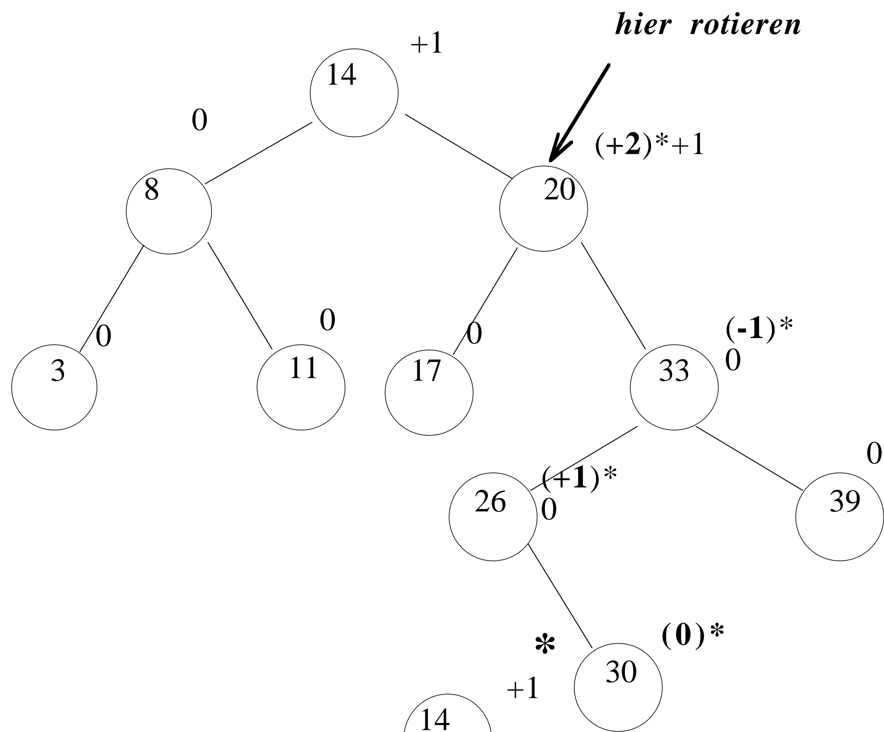
$(\alpha\ \beta)\ (\gamma\ \delta)$

dgl. LR-Rotation

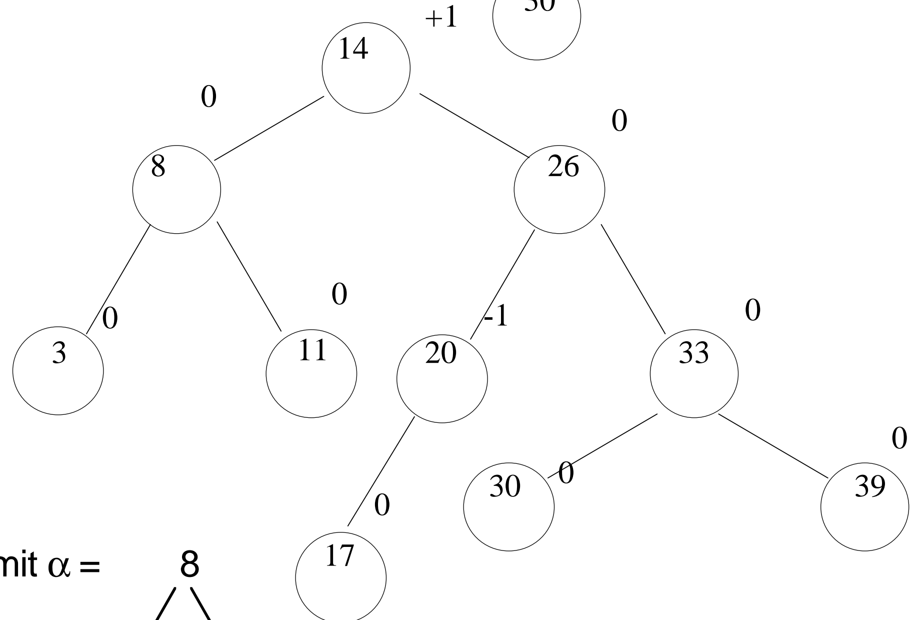
Implementierung:

Trage Schlüssel in Baum ein; Verfolge Weg zurück und verändere Balance bis Balance von ± 1 auf 0 abgeändert (=fertig) oder Balance auf ± 2 abgeändert wird (= rotieren).

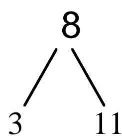
Beispiel:



RL-Rot. →



Fall 2 liegt vor: mit α =



β = 26 \ 30 $\quad \gamma = 39 \quad \delta = 17$, A = 20 , B = 33, C = 26

Löschen:

wie bei allg. Suchbäumen;

anschließend Korrektur der Balancen und Ausgleichsoperation vom Blatt aus;

Mehrere Ausgleichsoperationen sind möglich, maximal für jeden Knoten auf dem Weg von der Wurzel zur Ausfügestelle also O(log n). Da jede Rotation nur konstant viele Operationen erfordert, folgt

Satz

Suchen, Einfügen, Löschen in AVL-Bäumen erfordern im schlimmsten Fall $O(\log_2 n)$ Zeit.

Satz:

AVL-Bäume haben Höhe von O(log N)

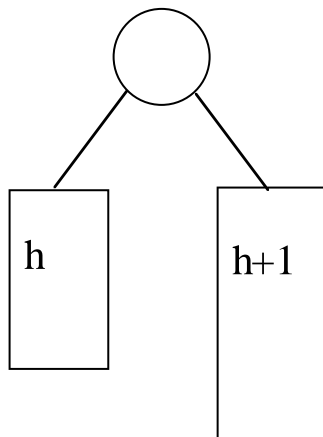
Beweis:

Wieviele Blätter F(h) enthält ein AVL-Baum der Höhe h mind.?

Höhe 1: 2 Blätter

Höhe 2: 3 Blätter

h + 2:



F (h+2) = F (h) + F (h+1). beinahe **Fibonacci-Funktion** (versetzt)

F(1)=2, F(2)=3, F(3)=5, ...

AVL-Baum der Höhe h hat wenigstens F(h+1) Blätter.

$F(h) \approx 0.72 \cdot 1.6^h$

[F (h) ist die $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{h+1}$ nächstgel. Zahl]

Anzahl der Blätter wächst exponentiell mit h.

Anz. Blätter $N \geq F(h+1) \approx 1{,}17 \cdot 1.618^h$

$\Rightarrow h \leq 1.44 \cdot \log_2 N$

Ergebnis: 44 % Verlust an Höhe gegenüber einem optimalen Baum.

5.3 B-Bäume

Bisher nur Suchalgorithmen für Hauptspeicher. Wie sieht die Suche auf externen Speichern (Platten) aus? Übertrage Baumstrukturen auf Plattenspeicher (Hauptspeicheradressen→Plattenspeicheradressen)

Problem: Die Zugriffszeit auf einen Knoten über einen Zeiger ist nicht mehr vernachlässigbar (nicht mehr nur eine Zeiteinheit).

Konsequenz: Reduktion der Plattenzugriffe auf ein Mindestmaß und Nutzung der geblockten Übertragung und Abspeicherung.
Konsequenz: Übertragung eines vollst. Teilbaums mit jedem Plattenzugriff.

Idee:
Zusammenfassung von Teilbäumen zu einem Super-Knoten und Realisierung einer Balanciertheit.

Definition

Ein Baum heißt **B-Baum der Ordnung m**, falls die folgenden Eigenschaften gelten:

a) Jeder Knoten enthält ≤ 2m Schlüssel.

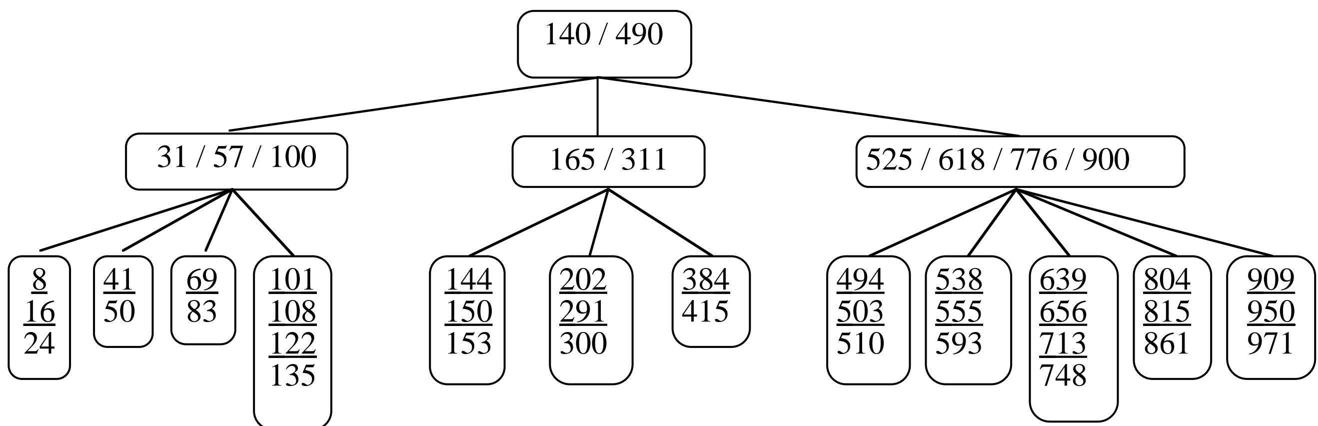
b) Jeder Knoten (mit Ausnahme der Wurzel) enthält mind. m Schlüssel.

c) Ein Knoten mit k Schlüsseln hat genau k + 1 Söhne oder keinen Sohn.

d) Alle Knoten, die keine Söhne haben, befinden sich auf gleichem Niveau.

e) Suchbaumeigenschaft: Sind $s_1, ..., s_k$ mit $m \leq k \leq 2m$ die Schlüssel eines Knotens x, dann sind alle Schlüssel des ersten Sohnes von x kleiner als s_1, alle Schlüssel des (k+1)-ten Sohnes größer als s_k und alle Schlüssel des i-ten Sohnes, $1<i<k+1$, größer als s_{i-1} und kleiner als s_i.

Beispiel:



Operationen:

Suchen: klar

Einfügen:

grundsätzlich an den Blättern. Falls Überlauf, Knoten teilen, mittleren Schlüssel zum Vater reichen usw.

Beispiel:

Einfügen 45 (einfach)

Einfügen 680 (mehrmals Aufspalten und Weiterreichen)

Löschen: aufwendiger

Prinzip: (s. Buch von Güting)

- Anreichern von Knoten um Schlüssel aus dem Vater
- Verschmelzen von Knoten

Algorithmen für B-Bäume der Ordnung m = 1 (sog. 2-3-Bäume): s. Vorlesung.

Laufzeitanalyse:

B-Baum der Ordnung m mit n Knoten

a) Suchen: Auf wieviele Plattenblöcke muß im worst-case zugegriffen werden?

Niveau 1: ≥ 2 Knoten (Blöcke)

Niveau 2: $\geq 2\,(m+1)$ Knoten (Blöcke)

Niveau 3: $\geq 2\,(m+1)^2$ Knoten (Blöcke)

...

Niveau k: $\geq 2\,(m+1)^{k-1}$ Knoten (Blöcke)

Andererseits $n \geq 2\,(m+1)^{k-1}$

$\Rightarrow k \leq 1 + \log_{m+1}\left(\frac{n}{2}\right) = O(\log_{m+1} n)$

$= [O(\log_2 m)]$

Praxis: m = 200 bis 2000.

b) Zeitraubende Operation ist Aufspalten von Knoten. Wie oft kommen denn Aufspaltungen vor?

Sei:

s: durchschnittl. Anzahl der Aufspaltungen pro Einfügung.

t: Gesamtzahl der Aufspaltungen bei Einfügung der Schlüssel $k_1, ..., k_n$ in leeren B-Baum

Offenbar: $s = \frac{t}{n}$

Sei p: Anzahl der Knoten/Blöcke in einem B-Baum

Dann $t = p-1$

Sei n_p: Mindestanzahl von Schlüsseln in einem B-Baum mit p Knoten

Dann gilt $n_p = 1 + (p-1) \cdot m \leq n$

$$\Rightarrow p \leq 1 + \frac{n-1}{m}$$

$$\Rightarrow s = \frac{t}{n} = \frac{p-1}{n} = \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{m}\right) < \frac{1}{m}.$$

$\Rightarrow$ Aufspaltungen „selten“ ($200 \leq m \leq 2000$).

Satz:

Suchen, Einfügen, Löschen in B-Bäumen der Ordnung m implementierbar mit $O(\log_m n)$ Plattenzugriffen.

Optimierungen:

Statt Aufspalten eines Knotens beim Einfügen mit geringer Speicherausnutzung besser Umverteilung der Schlüssel auf Bruderknoten (wie beim Löschen). Erst wenn Bruderknoten voll ist, wird aufgespalten (sog.B*-Bäume).

Garantie: Ausnutzung von mind. 2/3 der Kapazität jedes Knotens (Ausnahme: Wurzel).

B*-Bäume

5.4 Hashing

Bisher: Gegeben Schlüssel s; systematische **Suche** nach s im Datenbestand

Idee: Errechne aus s die **Position**, an der sich das Objekt im Speicher befindet.

Genauer: Sei K eine Menge von Schlüsseln und A eine Menge von Adressen, unter denen die Objekte mit Schlüsseln aus K abgespeichert sind. Eine Funktion

$h: K \rightarrow A$

heißt **Hash-Funktion**.

Suche nach Objekt mit Schlüssel k = Berechnung von h(k).

Ziel: Beschreibe h mit möglichst einfachen arithmetischen Operationen.

Beispiel: K_1 = {Januar, ..., Dezember}

A = {0, ..., 16}

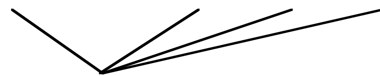
f: {A, ..., Z} $\rightarrow$ {1, ..., 26} ordnet jedem Buchstaben seine Position im Alphabet zu.

Definiere: $h_1: K_1 \rightarrow A$ durch

$h_1(k)$ = (f (1. Buchst. von k) + f (2. Buchst. von k)) mod 17

Ergebnis:

Monat	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
h_1	11	11	14	0	14	14	14	5	7	9	12	9



Kollisionen

Weiterer Versuch:

h_2 (k) = (f (2. Buchst.) + f (3. Buchst.)) mod 17 (immer noch **1 Kollision**)

h_3 (k) = (2 $\cdot$ f(1. Buchst.) + 2 $\cdot$ f (2. Buchst.) + f (3. Buchst.)) mod 17

(**kollisionsfrei**)

Vorgehensweise:

1) Bestimme Hash-Funktion h, die einfach zu berechnen ist, und die K möglichst gleichmäßig auf A abbildet.

2) Festlegung einer Strategie für Kollisionen.

zu 1)

- Schon bei kleinem K und großem A scheitert die Wahl einer zufälligen Funktion

  $h: K \rightarrow A.$

  Begründung: vgl. **Geburtstagsparadoxon**:

  $|K| = 23$, $|A| = 365$ und $f: K \rightarrow A$ zufällig.

  Dann ist die Wahrscheinlichkeit, daß

  $\forall k \neq k', k, k' \in K$ gilt: $f(k) \neq f(k')$

  kleiner als 1/2. Die Wahrscheinlichkeit, daß von 23 Personen zwei am selben Tag Geburtstag haben, ist also recht groß.

- Tatsächlich $|K| >> |A|$:

  z.B.

  K = {mögliche Nachnamen mit ≤ 10 Buchstaben} in einer Personaldatei

  A = 1...1000 Personalnummern für max. 1000 Mitarbeiter

  Folglich ist f üblicherweise nicht umkehrbar eindeutig (→ **viele** Kollisionen)

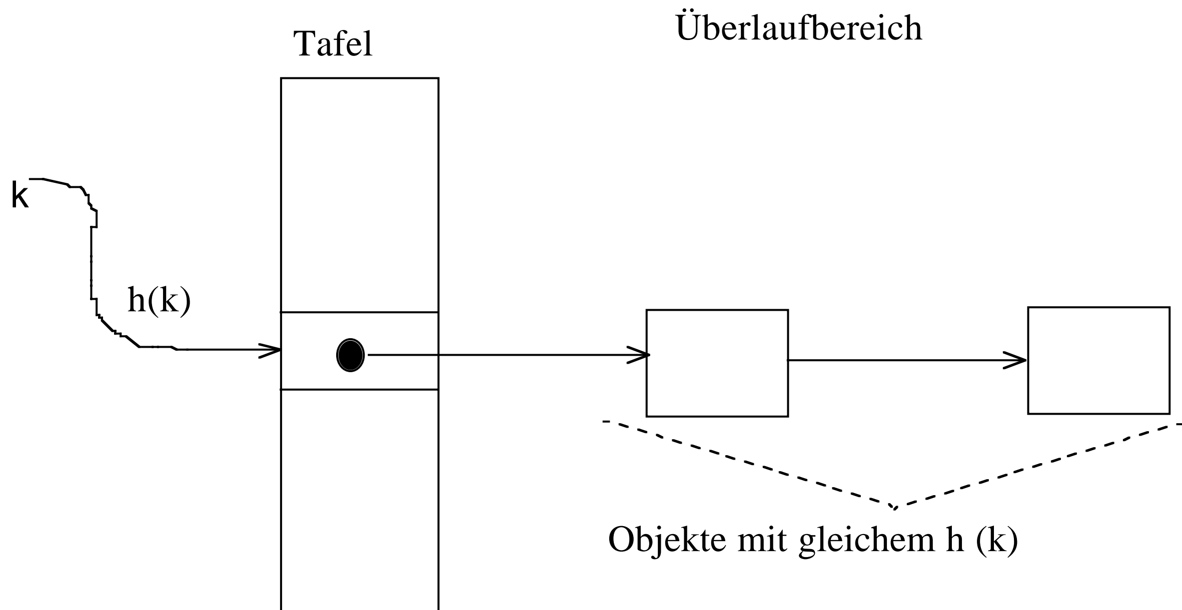
- Einfacher Ansatz

  $h(k) = k \bmod p$ (p Primzahl)

  k nicht numerisch → k vorher numerisch machen

zu 2)

a) Version mit Überlaufbereich: **direkte Verkettung**



Implementierung:

type Tafel = array [A] of ↑Objekt;

var T: Tafel; je Objekt ein next-Zeiger

Suchen: h := h (k); p:= T [h]; „sequentielle Suche nach k in T[h]";

Effizienz:

gut bei kurzen Listen

Gewinn von $\frac{|A|}{|K|}$ an Zeit, weil jede Liste im Durchschnitt $\frac{|A|}{|K|}$ Einträge hat.

Speicher: |K| Objekte und |A| + |K| Zeiger

b) Version **ohne** Überlaufbereich: **offene Adressierung**

b1) lineare Verschiebung:

Falls k nicht an Pos. h(k), suche k nacheinander an den Stellen

h(k)+c, h(k)+2c, ..., h(k)+ic, ...

c Konstante teilerfremd zu p

b2) quadratische Verschiebung:

Falls k nicht an Pos. h(k), suche k nacheinander an den Stellen

h(k)+1, h(k)+4, h(k)+9, ..., h(k)+i^2, ...

Beispiel: h für die Monatsnamen nachvollziehen.

Analyse:

Annahme: Einfügungen erfolgen an zufälligen Positionen. Jede der $\binom{|A|}{|K|}$ möglichen Konfigurationen von |A|-|K| freien und |K| besetzten Positionen ist gleichwahrscheinlich.

Aussage: (o. Beweis) Ist die Hash-Tabelle zu 90 % besetzt, werden im Mittel nur 2,56 Sondierungen nötig, um einen Schlüssel zu finden.